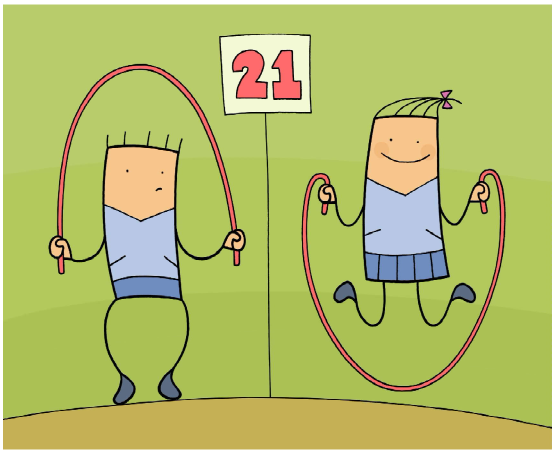
Богомолова Ольга Борисовна,
Усенков Дмитрий Юрьевич

ПОРА, ПОРА, ПАРАБОЛЫ: НОВЫЕ ЗАДАЧИ ПОД НОМЕРОМ 21

Ну вот и очередной ЕГЭ по информатике состоялся. И, как всегда, одиннадцатиклассников в этом году поприветствовали новыми задачами. Среди новинок – задачи под номером 21: традиционно в них использовались уравнения парабол (в крайнем случае – биквадратных), а теперь… Впрочем, давайте познакомимся с «новыми параболами», а вы – дорогие читатели – сами решите, стали ли эти задачи проще или сложнее.

Начнем для разминки с «традиционных» задач.

Задача 1. Определить, какое число будет напечатано в результате работы следующей программы:



Среди новинок – задачи под номером 21: традиционно в них использовались уравнения парабол...

```
Program A14;
var d,a,b,t,M,R :real;
Function F(x : real):real;
 begin
  F:=(x+2)*(4-x);
 end;
BEGIN
 a:=-2; b:=4;
 d:=0.1;
 t:=a; M:=a; R:=F(a);
 while t<=b do
  begin
   if (F(t)>R) then
    begin
     M:=t;
     R:=F(t);
    end;
   t:=t+d;
  end;
 write(M);
END.
```

Решение

Проанализируем текст программы. В ней вначале объявлен целый ряд переменных (раздел **var**).

Затем следует описание подпрограммы-функции с именем *F*, которой должно передаваться одно исходное значение – действительное число (формальный параметр *x*, затем используемый в качестве переменной в тексте подпрограммы) и которая должна возвращать действительное значение.

После подпрограммы записан текст основной программы (между **BEGIN** и **END**). В нем имеется цикл, в котором выполняется перебор значений цикловой переменной t от –2 до 4 с шагом 0.1 (именно потому использован цикл **while**, а не **for**). А в цикле имеется условный оператор и «привязанная» к его ветви **then** группа команд:

```
if (F(t)>R) then
  begin
   M:=t;
   R:=F(t);
  end;
```

Нетрудно увидеть, что этот фрагмент – не что иное как алгоритм поиска максимума функции: если ее очередное значение больше, чем ранее запомненное в переменной R, то оно перезапоминается в R, а соответствующее значение t запоминается в M.

(Сравним этот фрагмент программы хотя бы с поиском максимума в массиве:

```
if (Mas[i]>max) then
  begin
   maxi:=i;
   max:=Mas[i];
  end;
```

Как видим – полная аналогия.)

Теперь посмотрим на выражение, записанное в составе функции F. Очевидно, что если выполнить перемножение скобок, то мы получим квадратное уравнение:

$$(x+2)\cdot(4-x)=4x+8-x^2-2x=-x^2+2x+8.$$

Поскольку перед x^2 в нем стоит минус, ветви параболы, соответствующей этому уравнению, будут направлены вниз; мы же в своих вычислениях «движемся» по левой ветви этой параболы снизу вверх. Очевидно, что в процессе такого движения мы рано или поздно доберемся до вершины параболы, после чего с ростом t начнется движение по ее второй ветви уже сверху вниз. Тогда условие $F(t)>R$ перестанет выполняться (это произойдет, когда мы пройдем вершину параболы и перейдем к следующему же после этого значению t), а значит, прекратится и запись текущих значений t в переменную M. И так будет уже до самого конца цикла изменения t (рис. 1).

Остается найти абсциссу вершины параболы t. Для этого можно использовать тот факт, что в вершине параболы значение производной равно нулю: $-2x+2=0$. Тогда $x=1$, а значит, искомое значение переменной t равно 1.

Именно в вершине произойдет последнее переприсваивание значений M и R. А далее при выполнении цикла значение M останется равным значению t для вершины, то есть $M=1$.

Ответ: 1.

Задача 2. Определите, какое число будет напечатано в результате работы следующей программы:

```
Program A14;
Uses crt;
Var d,a,b,t,M,R :real;
Function F(x : real):real;
  begin
    F:=(x-1)*(x-3);
  end;
BEGIN
  a:=-3; b:=3;
  d:=0.1;
  t:=a; M:=a; R:=F(a);
  while t<b do
    begin
      if (F(t)<R) then
        begin
          M:=t;
          R:=F(t);
        end;
      t:=t+d;
    end;
  write(M);
END.
```

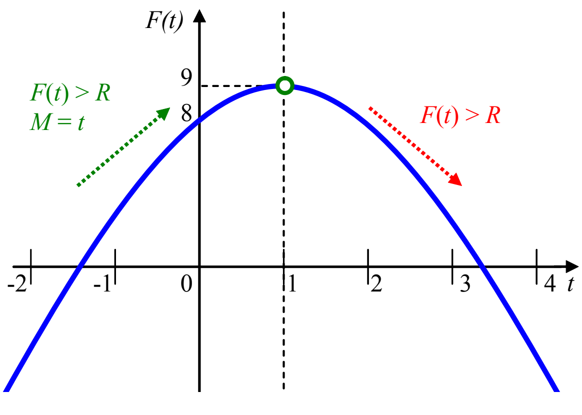


Рис. 1

Решение

Задача очень похожа на предыдущую и решается точно так же.

Извлекаем из текста программы «ключевую» информацию об обрабатываемом графике функции:

– диапазон изменения аргумента функции $[a, b]$ – от –3 до 3;

– шаг изменения аргумента функции d – 0,1;

– формула, определяющая функцию: $F = (x - 1) \cdot (x - 3)$.

Раскрыв в записи этой функции скобки, получим: $x^2 - 4x + 4$, то есть мы опять имеем дело с квадратичной функцией, график которой представляет собой параболу. При этом «нули» этой функции (точки пересечения ее графика с осью абсцисс) нетрудно найти из исходной записи функции: $(x–1) \cdot (x–3) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1,\ x_2 = 3$, а ветви параболы направлены вверх (при x^2 коэффициент положителен).

Вершина параболы (точка ее минимума) определяется приравниванием нулю производной заданной функции:
$F = (x - 1) \cdot (x–3) \Rightarrow F' = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow F = (2 - 1) \cdot (2 - 3) = -1$ (рис. 2).

Обратим внимание на фрагмент текста программы:

```
if (F(t)<R) then
  begin
    M:=t;
    R:=F(t);
  end;
```

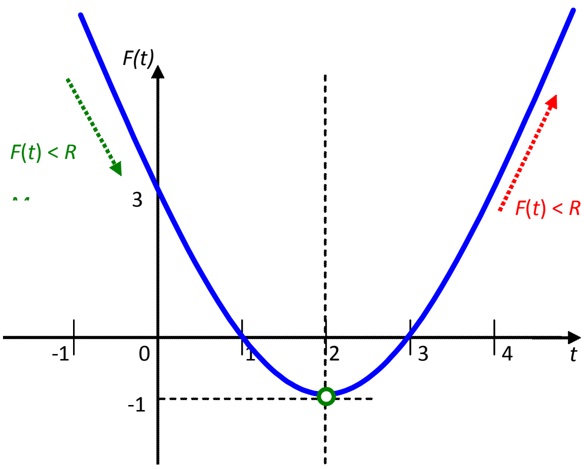


Рис. 2

В предыдущей задаче аналогичный фрагмент листинга содержал условие $F(t) > R$, и подобная перезапись значений M происходила, пока последующее значение функции оказывалось больше, чем запомненное в переменной R предыдущее, то есть происходил подъем по графику до точки максимума. В нашем же случае условие обратное: $F(t) < R$. Оно показывает, что изменение значений M будет происходить, пока последующее значение функции будет меньше предыдущего. Это соответствует спуску до минимальной точки параболы.

Тогда, по аналогии с предыдущей задачей, последним перезаписанным значением переменной M будет значение t, соответствующее точке минимума параболы, то есть 2.

Ответ: 2.

Возможны и другие вариации этих задач, когда в качестве ответа требуется указать значение R (вычисляется по найденному значению M) или, например, сумму $M + R$. Кроме того, может оказаться, что вершина параболы располагается ***вне*** заданного интервала изменения цикловой переменной, и тогда искомый минимум либо максимум будет находиться на границе циклового интервала. Однако в любом случае задача сводится к поиску минимума или максимума на цикловом интервале изменения t.

В подобных задачах решение производится по следующему алгоритму:

– проанализировать вид графика заданной функции;

– определить, выполняется ли подъем по графику до максимальной точки или спуск до минимальной;

– найти эту максимальную или минимальную точку и записать в качестве ответа соответствующее ей значение аргумента (x или t).

При этом, анализируя вид графика заданной функции, проверяйте, находится ли точка ее минимума (максимума) в заданном интервале изменения абсцисс. В противном случае остановка перезаписи значения M произойдет на границе интервала «на пути» к минимуму/максимуму, поэтому ответом будет значение аргумента на соответствующей границе исходного интервала.

А теперь – задача посложнее, которая встречалась на предыдущих ЕГЭ.

Задача 3. Определите, какое значение H нужно ввести, чтобы число, напечатанное в результате выполнения следующего алгоритма, было наименьшим.

```
var a,b,t,M,R,H : integer;
Function F(H, x: integer):integer;
  begin
    F := 11*(x-H)*(x-H)+13;
  end;
begin
  readln(H);
  a:=-10; b:=50;
  M:=a; R:=F(H,a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(H,t)>R then begin
      M:=t;
      R:=F(H,t);
    end;
  end;
  write(R);
end.
```

Решение

В предыдущих задачах требовалось для функции одной переменной $F(x)$, представляющей собой квадратное уравнение, найти, какое число выводится в результате. А здесь – функция с двумя переменными $F(H, x)$, которая представляет собой квадратное уравнение с параметром H, и искать надо значение этого параметра, такое, чтобы выводимое значение было наименьшим.

Прежде всего, заметим, что работа с функциями с одной и с двумя переменными полностью идентична: в обоих случаях в функцию передаются значения переменных, а результат возвращается через саму функцию $F()$. Поэтому сосредоточимся на собственно решении.

1. Анализируем алгоритм.

– В цикле идет перебор значений t от заданных ранее $a = –10$ до $b = 50$. При этом в переменной M запоминается сначала начальное значение a, а потом (при срабатывании условного оператора) – текущее значение t, а в переменной R хранится предыдущее значение функции $F(H, x)$.

– Если с увеличением значения t получаемое значение $F()$ увеличивается (и в результате оказывается больше предыдущего значения $F(t)$, запомненного в переменной R), текущее значение t заносится в переменную M, а значение функции в этой точке запоминается в R.

– До каких пор это будет продолжаться? Посмотрим на выражение, записанное в составе функции $F()$. Выполним в нем перемножение скобок. Получим:

$$11 \cdot (x - H) \cdot (x - H) + 13 = 11x^2 - 22xH + {} \\ + (11H^2 + 13).$$

Это – явно запись квадратного уравнения (если приравнять это выражение нулю), графиком которого является парабола. Поскольку перед x^2 стоит знак «плюс», ветви этой параболы направлены вверх. И мы в своих вычислениях «движемся» по левой ветви этой параболы сверху вниз. Значит, условный оператор в цикле не будет работать до тех пор, пока мы не пройдем вершину параболы (минимум на ее графике) и не поднимемся по правой ветви настолько, что значение выражения $11t^2 - 22tH + (11H^2 + 13)$ (замена переменной x на t происходит при переходе из основной программы в функцию) в некоторой точке t превысит его значение в исходной точке a. А после этого, пока мы «движемся» по правой ветви параболы вверх, у нас значение R будет всё расти вплоть до окончания цикла по достижении точки b (см. примерный рисунок). Следовательно, конечное значение R будет равно значению выражения

$$F(H, b) = 11b^2 - 22bH + (11H^2 + 13)$$

либо, если расположить параболу так, что указанное значение меньше, чем исходное

$$(F(H, a) = 11a^2 - 22aH + (11H^2 + +13)),$$

то значение R будет равно этому исходному (рис. 3).

2. Как нужно расположить параболу, чтобы получить минимально возможное значение R? И каким оно будет? Очевидно, что если ветвь `then` начнет работать, то это приведет к увеличению значения R. Следовательно, наименьшее значение R (которое и выводится на экран в результате работы программы) будет достигаться, если ветвь `then` так ни разу и не сработает (и будет равным значению в исходной точке a). Для это-

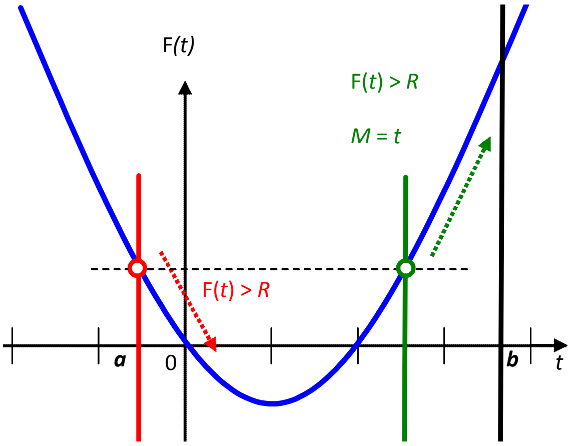


Рис. 3

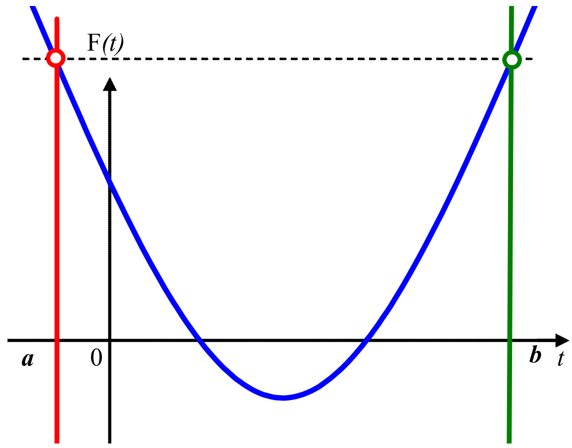


Рис. 4

го требуется, чтобы в точках $a = -10$ и $b = 50$ значения выражения, записанного в функции, были равными (рис. 4).

3. Остается вычислить значение H такое, чтобы получить нужное расположение параболы. Для этого надо составить уравнение в виде:

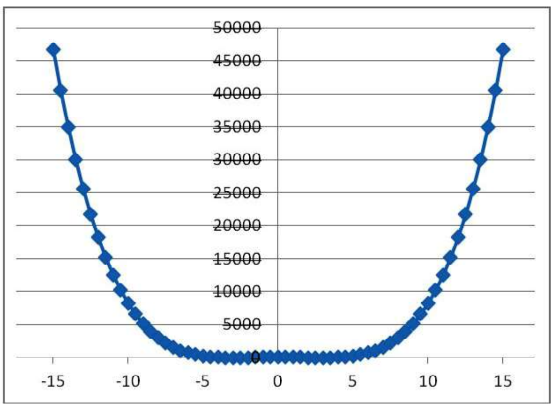


Рис. 5

$$11a^2 - 22aH + (11H^2 + 13) =$$
$$= 11b^2 - 22bH + (11H^2 + 13)$$

или, подставляя известные нам значения $a = -10$ и $b = 50$:

$$11 \cdot (-10)^2 - 22 \cdot (-10)H + (11H^2 + 13) =$$
$$= 11 \cdot 50^2 - 22 \cdot 50H + (11H^2 + 13).$$

Очевидно, одинаковые слагаемые $(11H^2 + 13)$ сразу сокращаются. Также можно разделить обе его части на 11. Получаем уравнение первого порядка:

$$(-10)^2 - 2 \cdot (-10)H = 50^2 - 2 \cdot 50H.$$

Решаем его:

$100 + 20H = 2500 - 100H;$

$100 + 20H = 2500 - 100H;$

$120H = 2400;$

$H = 20.$

Ответ: 20.

А вот теперь перейдем к биквадратной параболе.

Задача 4. Определить, какое число будет напечатано в результате выполнения программы:

```
var a,b,t,M,R :integer;

Function F(x:integer):integer;
begin
  F := (x*x-9)*(x*x-9)+3
end;

begin
  a := -15; b := 15;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do
    if (F(t) < R) then begin
      M := t; R := F(t)
    end;
write(M*R)
end.
```

Решение

Отличие от предыдущих задач в том, что функция представляет собой биквадратное выражение (x в четвертой степени). Парабола для такой функции получается немного другая, чем для квадратного выражения.

На рис. 5 показано, как выглядит соответствующий график при его построении в программе Excel в заданном диапазоне от –15 до 15 с шагом 0,5.

Кажется, что это все та же парабола с единственным минимумом. Но если выполнить построение в большем масштабе – для диапазона от –5 до 5 и с шагом 0,1, то картина получается совершенно иная (рис. 6).

То есть для выражения с четвертой степенью график имеет локальный максимум и два симметрично расположенных относительно него минимума. Соответственно, это нужно учесть при анализе поведения предлагаемой программы.

1. Коэффициент при x^4 (если выполнить перемножение скобок) – положительный, значит, ветви параболы направлены вверх.

2. В выражении функции

$$(x \cdot x - 9) \cdot (x \cdot x - 9) + 3$$

легко определить, какие точки графика соответствуют минимумам: скобки перемножаются одинаковые – значит, эти точки расположены симметрично относительно оси Y. Приравняв одну из скобок нулю: $(x \cdot x - 9) = 0$, получаем, что $x^2 = 9$, тогда значения x равны –3 и 3. Локальный максимум же (учитывая симметрию графика относительно оси Y) соответствует $x = 0$.

3. Прибавление константы 3 всего лишь «сдвигает» график на 3 единицы вверх. Это пока можно не учитывать.

4. В программе движение по графику производится слева направо. При этом переприсваивание значений переменных производится, если текущее значение функции меньше предыдущего, причем неравенство в условном операторе записано ***строгое***. Следовательно, программа выполняет ***поиск первого по счету минимума функции*** (при повторном обнаружении такого же минимального значения переприсваивание производиться не будет – неравенство строгое!).

5. Первый по счету при движении по графику слева направо минимум соответствует значению x (или t, что для нас то же самое), равному –3. Подставив это значение в выражение функции, получаем, что $F(t)$ равно 3.

6. В переменной M запоминается значение t найденной точки, а в переменной R – соответствующее значение функции, следовательно, в нашем случае $M = -3$, а $R = 3$.

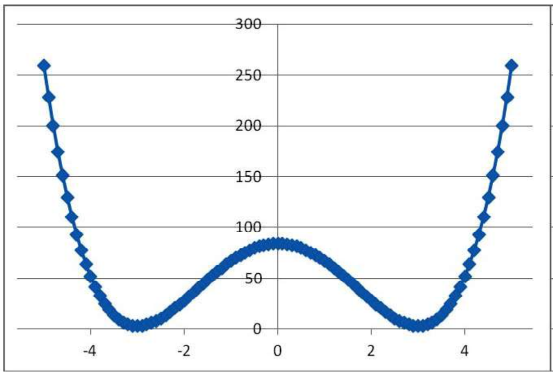


Рис. 6

Теперь особенно внимательно смотрим на то, что именно должна выводить программа: разработчики заданий ЕГЭ «ловят» школьников в том числе именно на этом.

В данной задаче программа выводит произведение значений M и R, и оно равно –9.

Ответ: –9.

А теперь перейдем к новым задачам этой серии, любезно приготовленным экзаменаторами.

Задача 5. Какое число будет напечатано в результате работы следующей программы?

```
var a, b, t, M, R :integer;
function F(x:integer):integer;
 begin
  if x>0
   then F := (x-10)*(x-10) + 9
   else F := (x-2)*(x-2) + 6
 end;
begin
  a := -9; b := 9;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do begin
    if F(t) <= R then begin
      M := t;
      R := F(t)
    end
  end;
  write(M+R)
end.
```

Решение

Такие задачи с параболами нам уже встречались. Но теперь график функции будет «кусочно-непрерывным», составленным из двух фрагментов парабол – для положи-

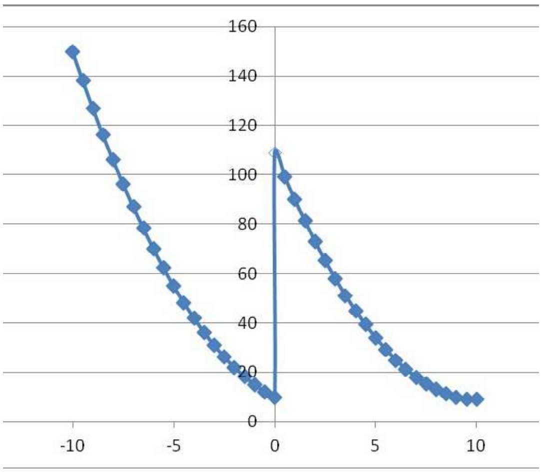


Рис. 7

тельных и неположительных значений x (рис. 7) (обратим внимание, что при $x = 0$ точка левой ветви графика – сплошная, а точка правой ветви – «выколотая»: это следует из строгости неравенства в условии оператора `if`).

В остальном же решение такое же, как в предыдущих аналогичных задачах, только нужно внимательно проследить за изменениями переменных в точке разрыва.

В нашем случае рассматривается интервал значений аргумента от –9 до 9, а переприсваивание значения R происходит, когда очередное значение функции меньше или равно предыдущему, то есть на заданном интервале ищется *последний минимум* значения функции с запоминанием в M значения соответствующего аргумента (рис. 8).

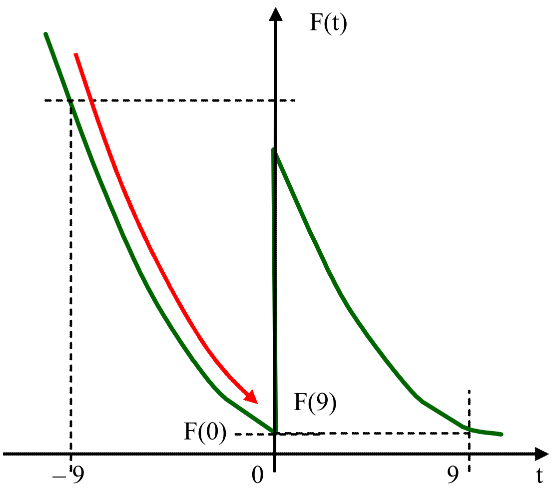


Рис. 8

В процессе работы программы производится спуск по графику сначала по левой ветви, а затем, после перехода через «скачок» в нуле, мы продолжаем движение по правой ветви. И здесь особенно важным будет соотношение значений левой части функции в нуле и правой части – в точке $t = 9$.

`F := (x-2)*(x-2) + 6` (ветвь `else` для `t <= 0`): `F(0) := (0-2)*(0-2) + 6 = 10`

`F := (x-10)*(x-10) + 9` (ветвь `then` для `t > 0`): `F(9) := (9-10)*(9-10) + 9 = 10`

Как видим, значения $F(0)$ и $F(9)$ равны.

Следовательно, переприсваивание значения R будет выполняться на левой ветви, а на правой его не будет вплоть до точки $t = 9$. Если бы у нас условие в `if` было строгим, то никаких переприсваиваний на правой ветви бы и не состоялось, а ответом была сумма нуля и значения $F(0)$. Но из-за того, что знак в условии нестрогий, у нас в самом конце работы цикла произойдет одно-единственное переприсваивание, которое меняет всю картину: для значения $F(9)$, равного $F(0)$, в M будет записано уже значение 9. А выводимое число станет равным $9 + 10 = 19$, а не 10.

Ответ: 19.

Задача 6. Какое число будет напечатано в результате работы следующей программы?

```
var a, b, t, M, R :integer;
function F(x:integer):integer;
 begin
  if x>0
   then F := (x-10)*(x-10) + 9
   else F := (x-2)*(x-2) + 6
 end;
begin
  a := -10; b := 10;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do begin
    if F(t) <= R then begin
      M := t;
      R := F(t)
    end
  end;
  write(M+R)
end.
```

Решение

Единственное изменение по сравнению с предыдущей задачей – строка, определяющая интервал, на котором ищется значение минимума. Поэтому опускаем все предварительные рассуждения и сразу переходим к анализу значений заданных функций в точках $t = 0$ и $t = 10$:

`F := (x-2)*(x-2) + 6` (ветвь **else** для `t <= 0`): `F(0) := (0-2)*(0-2) + 6 = 10`

`F := (x-10)*(x-10) + 9` (ветвь **then** для `t > 0`): `F(10) := (10-10)*(10-10) + 9 = 9`

Заметим, что значение $F(10)$ меньше, чем значение $F(0)$. Поэтому на правой ветви графика будет выполнено два переприсваивания в $t = 9$ (так как соответствующее условие – нестрогое) и в $t = 10$.

Тогда $M = 10$, $R = F(10) = 9$, а искомое значение суммы $M + R = 19$.

Ответ: 19.

Задача 7. Какое число будет напечатано в результате работы следующей программы?

```
var a, b, t, M, R :integer;
function F(x:integer):integer;
 begin
  if x>0
   then F := (x-10)*(x-10) + 9
   else F := (x-2)*(x-2) + 6
 end;
begin
  a := -8; b := 8;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do begin
    if F(t) <= R then begin
      M := t;
      R := F(t)
    end
  end;
  write(M+R)
end.
```

Решение

И снова единственное изменение – интервал, на котором ищется значение минимума, теперь равен (–8 ; 8). Произведем анализ значений заданных функций в точках $t = 0$ и $t = 8$:

`F := (x-2)*(x-2) + 6` (ветвь **else** для `t <= 0`): `F(0) := (0-2)*(0-2) + 6 = 10`

`F := (x-10)*(x-10) + 9` (ветвь **then** для `t > 0`): `F(8) := (8-10)*(8-10) + 9 = 13`

И поскольку значение $F(8)$ больше, чем значение $F(0)$, на правой ветви графика вообще не произойдет ни одного переприсваивания, M останется равным 0, а $R = F(0) = 10$. Тогда искомое значение суммы $M + R = 10$.

Ответ: 10.

Задача 8. Какое число будет напечатано в результате работы следующей программы?

```
var a, b, t, M, R :integer;
function F(x:integer):integer;
 begin
  if x < 1
   then F := 4 - x
   else if x > 5
     then F := x - 2
     else F := (x-3)*(x-3) + 1
 end;
begin
  a := -2; b := 8;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do begin
    if F(t) <= R then begin
      M := t;
      R := F(t)
    end
  end;
  write(M-R)
end.
```

Решение

Здесь заданная функция также является кусочно-непрерывной и состоит из трех участков: двух наклонных прямых по краям и фрагмента параболы в середине, причем граничные точки принадлежат параболе (рис. 9).

Согласно алгоритму, реализованному в программе, ищется минимум на заданном интервале. Поэтому переприсваивания будут происходить на левом отрезке прямой и на левой ветви параболы, а искомая точка минимума – это вершина параболы ($t = 3$).

В данном случае расположение точки минимума очевидно по построенному графику. Однако при решении подобного задания ЕГЭ следует произвести вычисления и сравнить значения $F(t)$ на границах задан-

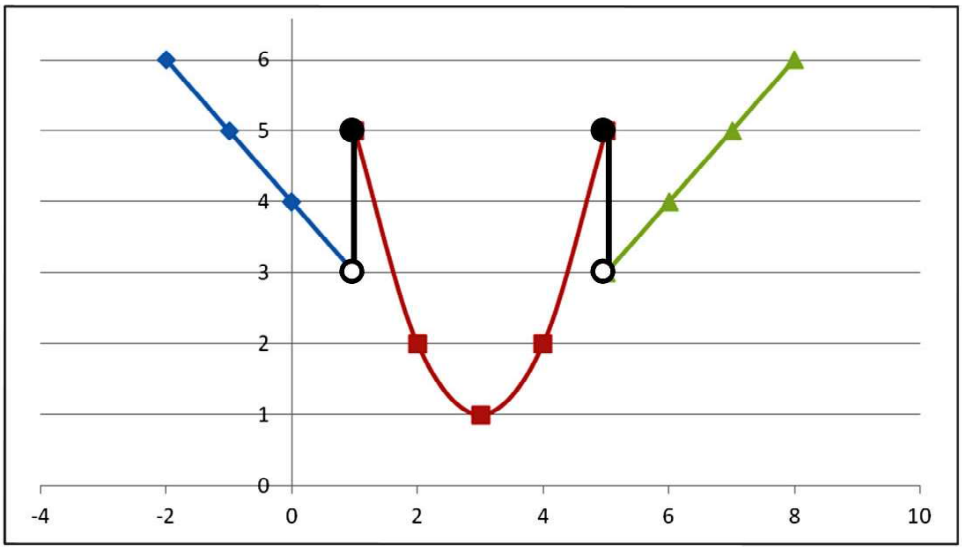


Рис. 9

ного интервала и во всех «характерных» точках, в том числе в граничных точках и найденной вершине параболы, при этом не забывая, что граничные точки вычисляются как значения функции параболы.

$F(-2) = 4 - (-2) = 6$

$F(1) = (1 - 3) \cdot (1 - 3) + 1 = 5$

$F(3) = (3 - 3) \cdot (3 - 3) + 1 = 1$

$F(5) = (5 - 3) \cdot (5 - 3) + 1 = 5$

$F(8) = 8 - 2 = 6$

Тогда итоговое значение $M = 3$, а $R = F(3) = 1$, и выводимое значение равно $3 - 1 = 2$.

Ответ: 2.

Задача 9. Какое число будет напечатано в результате работы следующей программы?

```
var a,b,t,M,R:integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F := abs(abs(x-2)+abs(x+2)-8) + 10
end;
begin
  a := -20; b := 20;
  M := a; R:= F(a);
  for t := a to b do begin
    if (F(t)<=R) then begin
      M := t;
      R:= F(t)
    end
  end;
  write(M+R);
end.
```

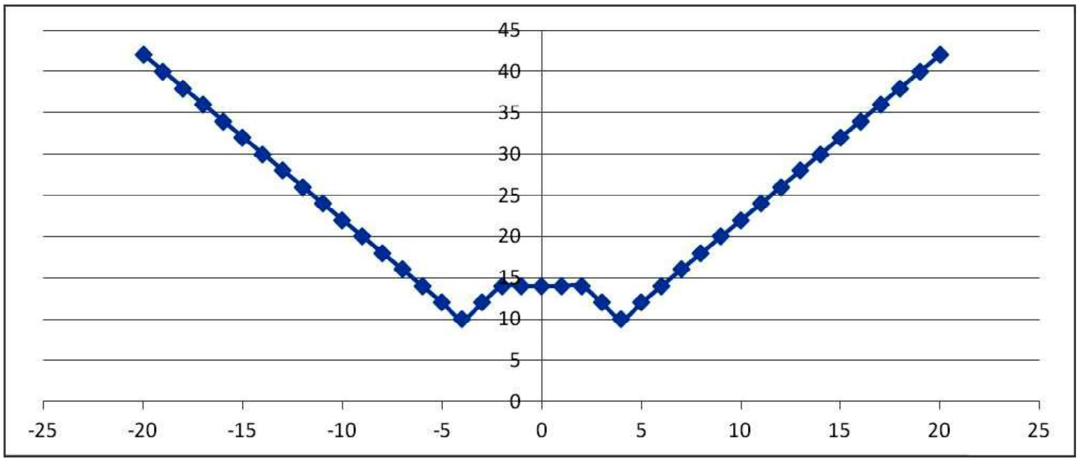


Рис. 10

Решение

Здесь у нас еще один вариант кусочно-непрерывной функции (рис. 10), получаемой в результате применения операции «значение по модулю».

Построение подобных графиков изучается в школьном курсе математики.

Исходная функция:

$$y = ||x - 2| + |x + 2| - 8| + 10$$

1. Строим график функции $y = x - 2$ и выполняем отражение его отрицательных значений y относительно оси OX (рис. 11).

2. Аналогичным способом строим график функции $y = |x + 2|$ (рис. 12).

3. Сложение этих двух графиков можно выполнять «по точкам», определяя для каждого значения x сумму значений y. Поскольку графики состоят из отрезков прямых, достаточно выполнить такую операцию сложения в двух «характерных» точках каждого отрезка, например:

– на левой границе заданного интервала: $x = -20 \Rightarrow y = |-22| + |-18| = 40$,

– в точке излома второго графика: $x = -2 \Rightarrow y = |-4| + 0 = 4$,

– в нулевой точке: $x = 0 \Rightarrow y = |-2| + 2 = 4$,

– в точке излома первого графика: $x = 2 \Rightarrow y = y = 0 + 4 = 4$,

– на правой границе заданного интервала: $x = 20 \Rightarrow y = 18 + 22 = 40$.

По этим точкам строим соответствующие отрезки прямых (рис. 13).

4. Рассматриваем выражение под внешним знаком модуля: $|x - 2| + |x + 2| - 8$.

Вычитание 8 означает сдвиг этого графика вниз на 8 единиц, а применение внешнего знака модуля соответствует отражению отрицательных значений y относительно оси OX (рис. 14).

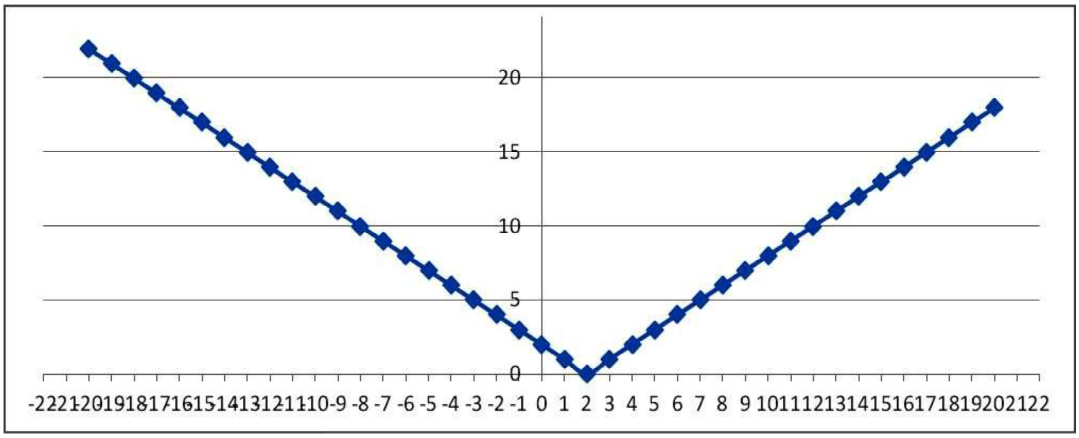


Рис. 11

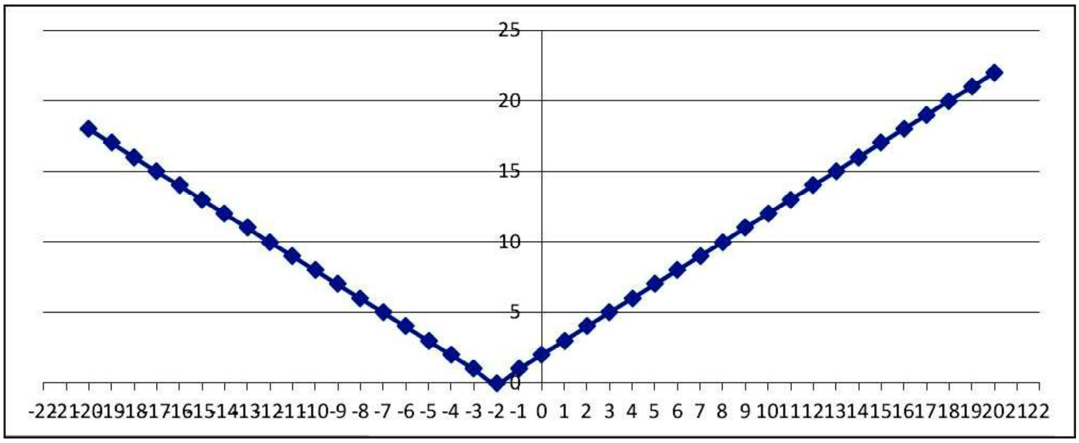


Рис. 12

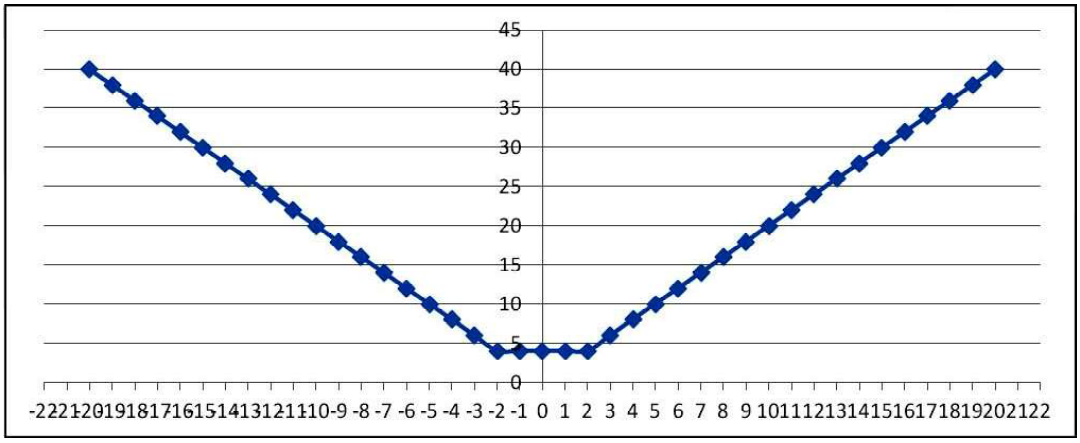


Рис. 13

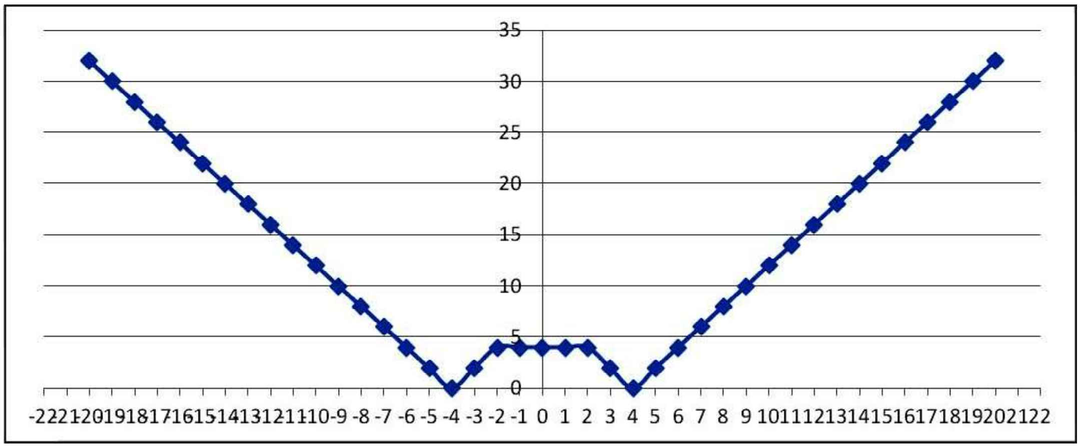


Рис. 14

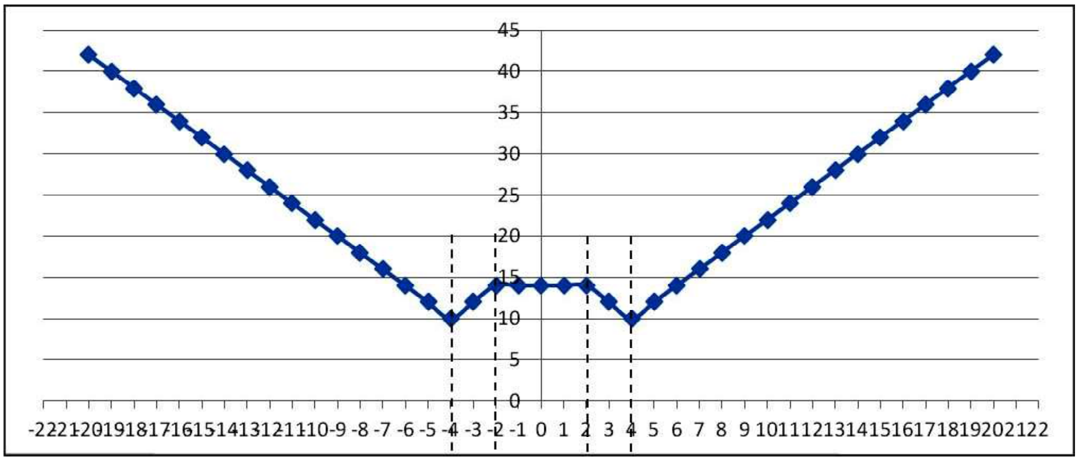


Рис. 15

5. Наконец, прибавление к внешнему модулю константы 10 означает сдвиг графика на 10 единиц вверх, после чего мы получаем окончательный вид графика (рис. 15).

А далее, как и раньше, анализируем алгоритм программы: исходя из условия `if (F(t)<=R)`, мы видим, что выполняется поиск минимума, при этом в точках с одинаковыми минимальными значениями функции F(t) выполняется переприсваивание значений $M = t$ и $R = F(t)$.

Поэтому при движении по построенному нами графику сначала будут получены значения $M = -4$, $R = F(-4) = 10$, затем на среднем участке графика переприсваиваний производиться не будет, а при достижении точки $M = 4$, в которой $F(4) = 10$, произойдет еще одно, последнее переприсваивание (вспомним: знак условия – нестрогий!), и значения интересующих нас переменных станут такими: $M = 4$, $R = F(4) = 10$.

Тогда искомое значение $M + R = 14$.

Ответ: 14.

Задача 9. Какое число будет напечатано в результате работы следующей программы?

```
var a,b,d,t,M,R:integer;
Function F(x,y:integer):integer;
begin
  F := x*x - x + y*y - y
end;
begin
  a := -2; b := 2;
d:=0.05;
 t:=a; M:=a; R:=F(a);
 while t<=b do
  begin
   if (F(t,t)<R) then
    begin
     M:=t;
     R:=F(t);
    end;
   t:=t+d;
  end;
 write(R);
end.
```

Решение

Такая задача с очень большой вероятностью может появиться в будущих ЕГЭ по информатике, поскольку аналогичное по смыслу задание появилось в ЕГЭ по математике (профиль). В отличие от предыдущих задач, здесь используется функция от двух переменных. Однако решение этой задачи аналогично рассмотренным выше.

1. Из неравенства в условии `if (F(t,t)<R)` понятно, что ищется минимум.

2. Исследуемая функция зависит от двух переменных x и y и по ним четко разделяется на две части: $x^2 - x$ и $y^2 - y$.

3. Представим исходную функцию как сумму двух функций:

$$f(x) = x^2 - x \text{ и } g(y) = y^2 - y.$$

Обе эти функции имеют одинаковый вид, а значит, точки минимума у них одинаковы (одинаковы как значения аргумента в точке минимума, так и минимальные значения самих функций).

4. Найти эту точку минимума можно, приравняв к нулю производные этих функций, причем вычисления достаточно выполнить только для одной из них, например, для $f(x)$:

$$f'(x) = 2x - 1 = 0,$$

тогда точка минимума $x_0 = 1/2 = 0{,}5$. Соответственно, значение самой функции в точке минимума равно

$$f(x_0) = 0{,}5^2 - 0{,}5 = 0{,}25 - 0{,}5 = -0{,}25.$$

Для второй функции все аналогично: $y_0 = 0{,}5$ и $g(y_0) = -0{,}25$.

5. Теперь для нахождения минимума всей исходной функции, которая является суммой $f(x)$ и $g(y)$, нужно выполнить сложение этих двух функций по характерным точкам (как это делалось выше), так как переменные x и y всегда равны друг другу. Но поскольку их аргументы в точке минимума совпадают, понятно, что минимум суммы этих функций будет равен сумме минимумов этих функций, и искомое минимальное значение функции `F := x*x - x + y*y - y` равно $-0{,}25 - 0{,}25 = -0{,}5$. И это – то самое искомое значение R, которое должна вывести программа.

Ответ: –0,5

ВАЖНО! Если в ответе должно фигурировать значение M либо комбинация R и M, то значение M у нас уже найдено – это значение равно $x_0 = y_0 = 0{,}5$.

ВАЖНО! В данном случае можно заметить, что, поскольку переменные x и y всегда одинаковы и равны t, можно свести исходную функцию $x^2 - x + y^2 - y$ к виду $2t^2 - 2t$ и искать минимум уже этой функции. Однако изменение значений переменных x и y может происходить и несинхронно.

Задача 10. Какое число будет напечатано в результате работы следующей программы?

```
var a,b,d,t,M,R:integer;
Function F(x,y:integer):integer;
begin
  F := x*x + y*y – x + y
end;
begin
  a := -2; b := 2;
d:=0.25;
 t:=a; M:=a; R:=F(a);
 while t<=b do
  begin
   if (F(t-1,t+1)<R) then
    begin
     M:=t;
     R:=F(t);
    end;
    t:=t+d;
   end;
  write(M+R);
end.
```

Решение

Программа похожа на рассмотренную выше, но усложнение в том, что теперь части исходной функции **F := x*x + y*y – x + y** при ее разбиении по переменным x и y имеют разный вид и различные минимумы, и к тому же значения х и у для этих функций – разные. Но решение усложняется не так сильно.

1. Определяем вид графиков обеих функций $f(x)$ и $g(y)$. При этом интервалы их аргументов оказываются фактически сдвинутыми: для $f(x)$ интервал изменения x равен (–3, 1), а для $g(y)$ интервал изменения y равен (–1, 3). Поэтому построение (рис. 16) выполняется на «суммарном» интервале (–3, 3) для значений $x = (t – 1)$ и $y = (t + 1)$.

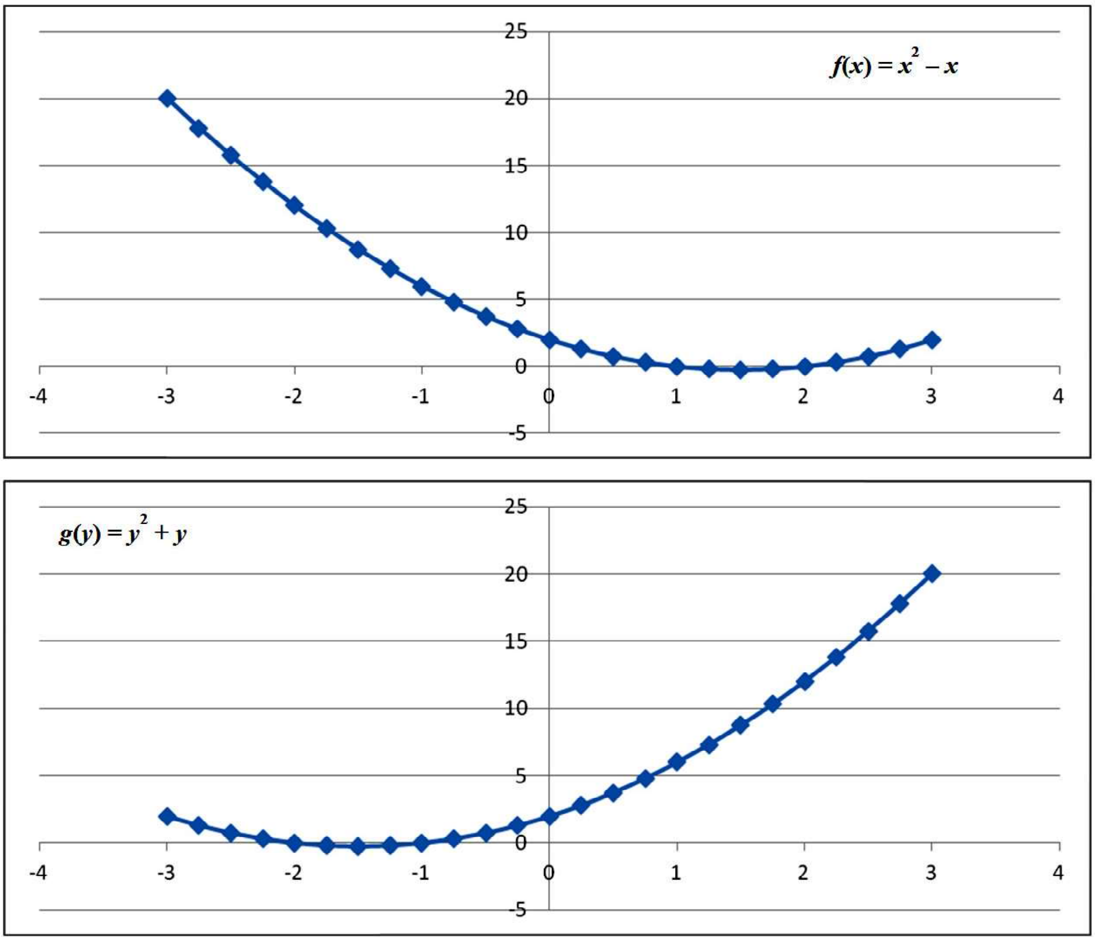


Рис. 16

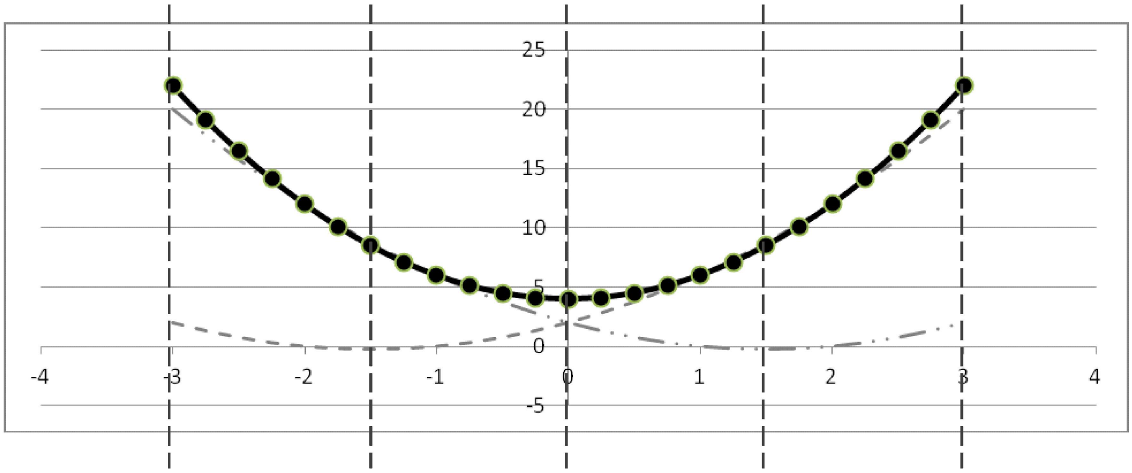


Рис. 17

2. Так как в цикле значения x и y, хотя и не одинаковы, но изменяются синхронно, для построения графика исходной функции `F := x*x + y*y – x + y` нужно выполнить сложение этих двух графиков, это можно сделать приближенно по характерным точкам, как мы это делали ранее для задачи с модулями. При этом характерными точками выбираем:

– левая граница интервала: $x = -3$: $f(-3) + g(-3) = 20 + 2 = 22$,

– минимум $g(y)$: $x = -1{,}5$: $f(-1{,}5) + g(-1{,}5) = 8{,}75 + (-0{,}25) = 8{,}5$,

– нулевая точка: $x = 0$: $f(0) + g(0) = 2 + 2 = 4$,

– минимум $f(x)$: $x = 1{,}5$: $f(1{,}5) + g(1{,}5) = (-0{,}25) + 8{,}75 = 8{,}5$,

– правая граница интервала: $x = 3$: $f(3) + g(3) = 2 + 20 = 22$.

После этого строим плавный график по полученным значениям функции (интерполируем функцию). Вид получаемого графика будет примерно следующим (рис. 17).

Отсюда видно, что минимум суммарной функции будет достигнут в точке $M = 0$, причем значение R при этом равно 4.

Ответ: 4.

ВАЖНО! Вид получаемой суммарной функции может быть различным, в том числе она может иметь несколько минимумов и максимумов. Тогда понадобится сравнивать между собой значения функции в точках минимумов: какой из них меньше, а при их равенстве – обращать внимание на строгость знака неравенства в условии, чтобы определить правильное значение M (как в задаче 4).

Богомолова Ольга Борисовна,
доктор педагогических наук,
почетный работник сферы
образования Российской Федерации,
Заслуженный учитель города
Москвы, учитель информатики
и математики ГБОУ СОШ № 1360,
г. Москва,

Усенков Дмитрий Юрьевич,
ГБОУ СОШ № 1360, г. Москва.